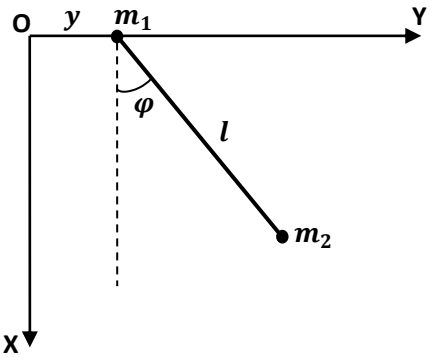
Université Ibn Khaldoun-Tiaret
Faculté des sciences de la matière
Département de physique

Année universitaire : 2023-2024
Niveau : 2e année Licence Physique
Module : Mécanique Analytique

Correction d'examen

EXERCICE 01 (08/08):



1- La masse m_1 est astreinte à se déplacer sans frottement le long de l'axe horizontal OY (c'est la première liaison), la masse m_2 est liée à la masse m_1 par un fil de longueur fixe l (c'est la deuxième liaison). Donc le système (S) a deux liaisons $(K = 2)$. 0.25

Alors le nombre de degrés de liberté du système est :

$$d = 2N - K = 2(2) - 2 = 2$$ 0.25

Les paramètres y et φ sont considérés comme coordonnées généralisées.

2- Calcul des coordonnées des masses m_1 et de m_2 en fonction de y, φ et l.

Vecteurs positions

Masse m_1 : $\overrightarrow{r_1} = y\overrightarrow{e_y}$ 0.5

Masse m_2 : $\overrightarrow{r_2} = l\,cos\varphi\,\overrightarrow{e_x} + (y + l\,sin\varphi)\,\overrightarrow{e_x}$ 0.5

Les vitesses

Masse m_1 : $\overrightarrow{v_1} = \frac{d}{dt}\left(y\overrightarrow{e_y}\right) = \dot{y}\overrightarrow{e_y}$ 0.5

Masse m_2 : $\overrightarrow{v_2} = \frac{d}{dt}\left(l\,cos\varphi\,\overrightarrow{e_x} + (y + l\,sin\varphi)\,\overrightarrow{e_y}\right) = -l\dot{\varphi}\,sin\varphi\,\overrightarrow{e_x} + (\dot{y} + l\dot{\varphi}\,cos\varphi)\,\overrightarrow{e_y}$ 0.5

Les énergies cinétiques

Masse m_1 : $T_1 = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2$ 0.25

Masse m_2 : $T_2 = \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 = \frac{1}{2}m_2[l^2\dot{\varphi}^2sin^2\varphi + (\dot{y} + l\dot{\varphi}\,cos\varphi)^2] = \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{y}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\,cos\varphi)$ 0.5

L'énergie cinétique du (S) est

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{y}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\,cos\varphi) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}lm_2(l\dot{\varphi}^2 + 2\dot{y}\dot{\varphi}\,cos\varphi)$$ 0.25

3- L'énergie potentielle du (S).

$$U = U_1 + U_2 = 0 + m_2gh_2 = -m_2glcos\varphi$$ 0.5

4- Le Lagrangien du (S) est donné par

$$L(y, \varphi, \dot{y}, \dot{\varphi}) = T - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}lm_2(l\dot{\varphi}^2 + 2\dot{y}\dot{\varphi}\,cos\varphi) - (-m_2glcos\varphi)$$

$$\Rightarrow L(y, \varphi, \dot{y}, \dot{\varphi}) = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{y}^2 + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + m_2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi + m_2gl\cos\varphi$$ 0.5

Calcul des moments conjugués P_y et P_φ.

$$P_y = \frac{dL}{d\dot{y}} = (m_1 + m_2)\dot{y} + m_2l\dot{\varphi}cos\varphi$$ 0.5

$$P_\varphi = \frac{dL}{d\dot{\varphi}} = m_2l^2\dot{\varphi} + m_2l\dot{y}cos\varphi$$ 0.5

5- Les équations de Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\{(m_1 + m_2)\dot{y} + m_2l\dot{\varphi}cos\varphi\} - 0 = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)\dot{y} + m_2l\dot{\varphi}cos\varphi = cste$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2l\ddot{\varphi}cos\varphi - m_2l\dot{\varphi}^2sin\varphi = 0$$ 0.5

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\{m_2l^2\dot{\varphi} + m_2l\dot{y}cos\varphi\} - (-m_2l\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2gl\sin\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow m_2l^2\ddot{\varphi} + m_2l\ddot{y}cos\varphi - m_2l\dot{y}\dot{\varphi}sin\varphi + m_2l\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2gl\sin\varphi = 0$$

$$\Rightarrow m_2l^2\ddot{\varphi} + m_2l\ddot{y}cos\varphi + m_2gl\sin\varphi = 0 \Rightarrow l\ddot{\varphi} + \ddot{y}cos\varphi + g\sin\varphi = 0$$ 0.5

6- Dans le cadre de l'approximation des faibles oscillations, $\varphi \to 0 \Rightarrow cos\varphi \approx 1 \;\; et \; sin\varphi \approx \varphi$

$$\Rightarrow l\ddot{\varphi} + \ddot{y} + g\varphi = 0$$ 0.5

et l'approximation des oscillations lentes (on néglige le terme de l'équation différentielle en $\dot{\varphi}$)

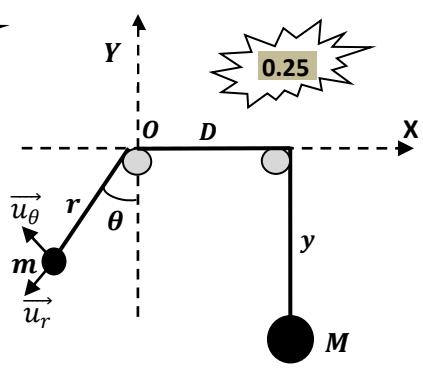
$$\Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2 l\ddot{\varphi} = 0$$ 0.5

Des deux dernières expressions, on obtient :

$$\ddot{\varphi} + \frac{\ddot{y}}{l}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ddot{\varphi} - \frac{(l\ddot{\varphi} + g\varphi)}{l}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ddot{\varphi}\left(1 - \frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) - \frac{g}{l}\frac{m_1 + m_2}{m_2}\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi}\left(-\frac{m_1}{m_2}\right) - \frac{g}{l}\frac{m_1+m_2}{m_2}\varphi = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\frac{m_1+m_2}{m_1}\varphi = 0$$ 0.5

EXERCICE 02 (08/08) :



1- L'énergie cinétique : 0.25 0.25

Masse M : on a $l = r + D + y \Rightarrow y = l - D - r = cste - r \Rightarrow \dot{y} = -\dot{r}$

où D: *distance entre les poulies = cste.*

y: *distance entre la poulie et la masse M*

$$\Rightarrow T_M = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 = \frac{1}{2}M\dot{r}^2$$ 0.5

Masse m : on a $\vec{r} = r\overrightarrow{u_r} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt}(r\overrightarrow{u_r}) = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ 0.25

$$\Rightarrow T_m = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$ 0.5

Alors l'énergie cinétique du système est :

$$T = T_M + T_m = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$ 0.25

L'énergie potentielle :

Masse M : $U_M = -Mgy = -Mg(l - D - r) = Mg(D - l) + Mgr$ 0.5

Masse m : $U_m = -mgrcos\theta$ 0.5

Où $Mg(D - l)$ est une constante

Alors l'énergie potentielle totale du système est :

$$U = U_M + U_M = Mgr - mgrcos\theta + Mg(D - l)$$ 0.25

Donc le Lagrangien du système :

$$L = T - U = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - Mgr + mgrcos\theta - Mg(D - l)$$

À une constante additive près, le Lagrangien est :

$$L = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - Mgr + mgr\cos\theta$$ 0.5

2- Les équations du mouvement.

$\boxed{r:}$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}[(M + m)\dot{r}] - \left(mr\dot{\theta}^2 - Mg + mgcos\theta\right) = 0$

$$\Rightarrow (M + m)\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + Mg - mgcos\theta = 0 \quad \text{---------- (1)}$$ 0.5

$\boxed{\theta:}$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) - mgrsin\theta = 0 \Rightarrow 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} + mgrsin\theta = 0$

$$\Rightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + gsin\theta = 0 \quad \text{---------- (2)}$$ 0.5

3- L'expression du hamiltonien.

$$H = P_r\dot{r} + P_\theta\dot{\theta} - L = P_r\dot{r} + P_\theta\dot{\theta} - \frac{1}{2}M\dot{r}^2 - \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + Mgr - mgr\cos\theta$$ 0.25

Où

$$\left\| \begin{array}{l} P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (M+m)\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{P_r}{M+m} \\ P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2} \end{array} \right.$$

0.5

$$\Rightarrow H = P_r \frac{P_r}{M+m} + P_\theta \frac{P_\theta}{mr^2} - \frac{1}{2}M\left(\frac{P_r}{M+m}\right)^2 - \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{P_r}{M+m}\right)^2 + r^2\left(\frac{P_\theta}{mr^2}\right)^2\right] + Mgr - mgr\cos\theta$$

$$H = \frac{{P_r}^2}{(M+m)^2}\left[(M+m) - \frac{1}{2}(M+m)\right] + \frac{{P_\theta}^2}{mr^2}\left[1 - \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{m}\right)\right] + Mgr - mgr\cos\theta$$

$$\Rightarrow H = \frac{{P_r}^2}{2(M+m)} + \frac{{P_\theta}^2}{2mr^2} + Mgr - mgr\cos\theta$$

0.25

4- Les équations canoniques :

$\boxed{\boldsymbol{r}:}$

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{(M+m)} \\ \dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\left[\frac{{P_\theta}^2}{2m}\left(\frac{-2}{r^3}\right) + (M - mcos\theta)g\right] = \frac{{P_\theta}^2}{mr^3} + (mcos\theta - M)g \end{cases}$$

0.5

$$\Rightarrow \ddot{r} = \frac{\dot{P}_r}{(M+m)} = \frac{1}{(M+m)}\left[\frac{{P_\theta}^2}{mr^3} + (mcos\theta - M)g\right] \Rightarrow (M+m)\ddot{r} - \frac{(mr^2\dot{\theta})^2}{mr^3} - (mcos\theta - M)g = 0 \Leftrightarrow$$

$$(M+m)\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mgcos\theta + Mg = 0 \text{ ----------(3)}$$

0.25

$\boxed{\boldsymbol{\theta}:}$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2} \\ \dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgrsin\theta \end{cases}$$

0.5

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\dot{P}_\theta r^2 - 2r\dot{r}P_\theta}{mr^4} = \frac{1}{mr^3}[\dot{P}_\theta r - 2\dot{r}P_\theta] = \frac{1}{mr^3}[-mgr^2sin\theta - 2\dot{r}mr^2\dot{\theta}] = -\frac{1}{r}[2\dot{r}\dot{\theta} + gsin\theta]$$

$$\Rightarrow r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + gsin\theta = 0 \text{ ----------(4)}$$

0.25

Les deux dernières équations (3) et (4) sont équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange (1) et (2).

5- La norme du moment cinétique de la masse m par rapport à O.

$$\|\vec{\mathcal{L}}_{m/O}\| = \|\overrightarrow{Om} \times m\vec{v}\| = \|r\vec{u}_r \times m(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta})\| = mr^2\dot{\theta} = P_\theta$$

0.25

6- Le crochet de Poisson du hamiltonien avec la norme du moment cinétique.

$$\{H, \mathcal{L}_{m/O}\}_{\theta,P_\theta} = \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \mathcal{L}_{m/O}}{\partial P_\theta} - \frac{\partial H}{\partial P_\theta}\frac{\partial \mathcal{L}_{m/O}}{\partial \theta} = mgrsin\theta - \frac{P_\theta}{mr^2}(0) = mgrsin\theta$$

0.5

EXERCICE 03 (04/04) :

1. Le lagrangien d'un oscillateur harmonique unidimensionnel.

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

0.5

2. Le Hamiltonien $\mathcal{H}(q,p)$ du système.

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - L = p\dot{q} - \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 + \tfrac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

0.25

$$\text{Où } \; p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$$

0.25

Alors

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - L = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

0.25

3. On considère la transformation suivante des anciennes variables (q,p) aux nouvelles variables (Q,P)

$$Q = C.(p + i.m\omega.q) \quad \text{et} \quad P = C.(p - i.m\omega.q)$$

Pour que la transformation soit canonique il faut $\{Q,P\}_{q,p} = 1$.

0.5

Calculons

$$\{Q,P\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = im\omega CC + Cim\omega C = 2im\omega C^2 = 1$$

$$C^2 = \frac{1}{2im\omega}$$

0.25

4. Le nouveau Hamiltonien $\mathcal{H}(Q,P)$.

$$\begin{cases} Q = C.(p + i.m\omega.q) \\ P = C.(p - i.m\omega.q) \end{cases} \Rightarrow Q + P = 2C.p \Rightarrow p = \frac{1}{2C}(Q+P)$$

0.5

et

$$Q - P = 2Cim\omega q \Rightarrow q = \frac{1}{2Cim\omega}(Q-P)$$

0.5

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \frac{1}{2m}\left[\frac{1}{2C}(Q+P)\right]^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\left[\frac{1}{2Cim\omega}(Q-P)\right]^2$$

$$\mathcal{H} = \frac{2im\omega}{8m}[(Q+P)]^2 - \frac{1}{8}\frac{m\omega^2 2im\omega}{m^2\omega^2}[(Q-P)]^2 = \frac{1}{4}i\omega(Q+P)^2 - \frac{1}{4}i\omega(Q-P)^2 = \frac{1}{4}i\omega 4PQ = i\omega PQ$$

$$\mathcal{H} = i\omega PQ$$

1